

Limites e Continuidade

2009/10

Definição

Dados dois conjuntos A e B chama-se **função definida em A com valores em B** a toda a correspondência entre A e B que a cada elemento de A faça corresponder um e um só elemento de B . Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ a **função** diz-se **real de variável real**.

Definição

Seja f uma função real de variável real.

- Chama-se **domínio** de f ao conjunto dos valores reais que têm imagem pela função f , isto é, ao conjunto dos números reais para os quais a expressão analítica de f está bem definida.
- Chama-se **contradomínio** de f ao conjunto dos valores reais que são imagem pela função f dos elementos do domínio.

Definição

Seja f uma função real de variável real.

- Chama-se **domínio** de f ao conjunto dos valores reais que têm imagem pela função f , isto é, ao conjunto dos números reais para os quais a expressão analítica de f está bem definida.
- Chama-se **contradomínio** de f ao conjunto dos valores reais que são imagem pela função f dos elementos do domínio.

Definição

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chama-se **gráfico** da função f ao conjunto

$$\{(x, y) : x \in D, y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. Diz-se que:

- f é **majorada no conjunto** A se $f(A)$ é um conjunto majorado em $\mathbb{R}$
- f é **minorada no conjunto** A se $f(A)$ é um conjunto minorado em $\mathbb{R}$

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. Diz-se que:

- f é **majorada no conjunto** A se $f(A)$ é um conjunto majorado em $\mathbb{R}$
- f é **minorada no conjunto** A se $f(A)$ é um conjunto minorado em $\mathbb{R}$

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. Diz-se que:

- f é **limitada no conjunto** A se $f(A)$ é um conjunto majorado e minorado em $\mathbb{R}$

A função f diz-se **limitada** se o seu contradomínio ($f(D)$) for um conjunto limitado. Caso contrário, diz-se que f é **ilimitada**.

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. Diz-se que:

- f é **limitada no conjunto** A se $f(A)$ é um conjunto majorado e minorado em $\mathbb{R}$

A função f diz-se **limitada** se o seu contradomínio ($f(D)$) for um conjunto limitado. Caso contrário, diz-se que f é **ilimitada**.

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c, d \in D$. Diz-se que $f(c)$ é um **máximo** de f se para qualquer $x \in D$,

$$f(x) \leq f(c).$$

A c chama-se um **ponto de máximo**.

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c, d \in D$. Diz-se que $f(c)$ é um **máximo** de f se para qualquer $x \in D$,

$$f(x) \leq f(c).$$

A c chama-se um **ponto de máximo**.

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c, d \in D$. Diz-se que $f(d)$ é um **mínimo** de f se, para qualquer $x \in D$,

$$f(d) \leq f(x)$$

A d chama-se um **ponto de mínimo**.

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c, d \in D$. Diz-se que $f(d)$ é um **mínimo** de f se, para qualquer $x \in D$,

$$f(d) \leq f(x)$$

A d chama-se um **ponto de mínimo**.

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **crescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) \leq f(y), \forall x, y \in A$$

- **estritamente crescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) < f(y), \forall x, y \in A$$

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **crescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) \leq f(y), \forall x, y \in A$$

- **estritamente crescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) < f(y), \forall x, y \in A$$

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **decrecente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) \geq f(y), \forall x, y \in A$$

- **estritamente decrescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) > f(y), \forall x, y \in A$$

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **decrescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) \geq f(y), \forall x, y \in A$$

- **estritamente decrescente** em $A \subseteq D$ se

$$x < y \implies f(x) > f(y), \forall x, y \in A$$

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **monótona** em $A \subseteq D$ se é crescente ou decrescente em A
- **estritamente monótona** em $A \subseteq D$ se é estritamente crescente ou estritamente decrescente em A

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **monótona** em $A \subseteq D$ se é crescente ou decrescente em A
- **estritamente monótona** em $A \subseteq D$ se é estritamente crescente ou estritamente decrescente em A

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^2 - 2$ e a sucessão $u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

- 1 $f \circ u = ???$
- 2 Calcule $\lim f \circ u$.

Tomemos V uma vizinhança de a , ou seja,

$$V =]a - \epsilon, a + \epsilon[\setminus \{a\}, \epsilon > 0.$$

Definição

Diz-se que f **tem limite em** a se e só se existe um número L tal que, qualquer que seja a sucessão u_n convergente para a em que $\{u_n\} \subset V$, verifica-se $f(u_n) \rightarrow L$.

Nesse caso escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Tomemos V uma vizinhança de a , ou seja,

$$V =]a - \epsilon, a + \epsilon[\setminus \{a\}, \epsilon > 0.$$

Definição

Diz-se que f **tem limite em** a se e só se existe um número L tal que, qualquer que seja a sucessão u_n convergente para a em que $\{u_n\} \subset V$, verifica-se $f(u_n) \rightarrow L$.

Nesse caso escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Definição

Diz-se que uma função f definida em $V^+ =]a, a + \epsilon[$ tem **limite lateral à direita** de a se existir L tal que, para qualquer sucessão com termos em V^+ convergente para a verifica-se:

$$f(u_n) \rightarrow L.$$

Nesse caso escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

Teorema

Se f e g são duas funções com limite em a então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f - g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{se } k \in \mathbb{R}, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Teorema

Se f e g são duas funções com limite em a então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f - g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{se } k \in \mathbb{R}, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Teorema

Se f e g são duas funções com limite em a então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f \cdot g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Teorema

Se f e g são duas funções com limite em a então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f \cdot g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Teorema

Sejam f, g e h funções definidas num conjunto

$V =]a - \epsilon, a + \epsilon[\setminus \{a\}$ tais que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in V.$$

Se g e h tiverem o mesmo limite L em a então f tem limite L em a .

Definição

Diz-se que f **tem limite em** a se e só se existe um número L tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição

Seja f uma função real definida numa vizinhança V_ϵ do ponto a ($\epsilon > 0$), i.e. num intervalo de tipo $V_\epsilon(a) =]a - \epsilon, a + \epsilon[$. Diz-se que f é **contínua em a** se e só se

- ① $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definição

- Diz-se que: f é **contínua à esquerda** no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e este for igual a $f(a)$
- f é **contínua à direita** no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e este for igual a $f(a)$
- f é **contínua** no ponto a se e só se for contínua à direita e à esquerda no ponto a

Definição

- Diz-se que: f é **contínua à esquerda** no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e este for igual a $f(a)$
- f é **contínua à direita** no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e este for igual a $f(a)$
- f é **contínua** no ponto a se e só se for contínua à direita e à esquerda no ponto a

Definição

- Diz-se que: f é **contínua à esquerda** no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e este for igual a $f(a)$
- f é **contínua à direita** no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e este for igual a $f(a)$
- f é **contínua** no ponto a se e só se for contínua à direita e à esquerda no ponto a

Definição

Uma função que apenas verifique a condição 1, ou seja

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

diz-se **prolongável por continuidade em a** .

Teorema

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas em a . Então

- *$(f + g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se k é um número real, $k.f(x)$ é contínua em a ,*
- *$(f.g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a .*

Teorema

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas em a . Então

- *$(f + g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se k é um número real, $k.f(x)$ é contínua em a ,*
- *$(f.g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a .*

Teorema

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas em a . Então

- *$(f + g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se k é um número real, $k.f(x)$ é contínua em a ,*
- *$(f.g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a .*

Teorema

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas em a . Então

- *$(f + g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se k é um número real, $k.f(x)$ é contínua em a ,*
- *$(f.g)(x)$ é contínua em a ,*
- *se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a .*

Teorema

Composição de funções contínuas

Seja f uma função definida em $]a - \epsilon_1, a + \epsilon_1[$, contínua em a e seja g definida numa vizinhança $]f(a) - \epsilon_2, f(a) + \epsilon_2[$, contínua em $f(a)$. Então $g \circ f$ é contínua em a .

Definição

- Dado um intervalo aberto $I =]a, b[$ diz-se que f é **contínua em I** se for contínua em todos os pontos de I .
- Dado um intervalo fechado $I = [a, b]$, diremos que f é **contínua em I** se for contínua em todo o $x \in]a, b[$, se for contínua à direita de a e se for contínua à esquerda de b .
- Definições análogas valem para intervalos de tipo $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Definição

- Dado um intervalo aberto $I =]a, b[$ diz-se que f é **contínua em I** se for contínua em todos os pontos de I .
- Dado um intervalo fechado $I = [a, b]$, diremos que f é **contínua em I** se for contínua em todo o $x \in]a, b[$, se for contínua à direita de a e se for contínua à esquerda de b .
- Definições análogas valem para intervalos de tipo $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Definição

- Dado um intervalo aberto $I =]a, b[$ diz-se que f é **contínua em** I se for contínua em todos os pontos de I .
- Dado um intervalo fechado $I = [a, b]$, diremos que f é **contínua em** I se for contínua em todo o $x \in]a, b[$, se for contínua à direita de a e se for contínua à esquerda de b .
- Definições análogas valem para intervalos de tipo $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Teorema

Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ em que $f(a) \neq f(b)$. Seja k um valor compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, i.e.

$$f(a) < k < f(b) \text{ ou } f(b) < k < f(a).$$

Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

Corolário

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema

Teorema de Weierstrass

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então f tem um máximo e um mínimo em $[a, b]$, i.e.

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] : \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Corolário

Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o seu contradomínio é um intervalo limitado e fechado. Mais precisamente:

$$f([a, b]) = [m, M],$$

em que m e M são respectivamente o mínimo e o máximo da função f .

De outro modo, podemos dizer que funções contínuas transformam intervalos limitados e fechados em intervalos limitados e fechado.